

Hong Kong Mathematics Olympiad (2009 – 2010)

Heat Event (Individual)

香港數學競賽 (2009 – 2010)

初賽項目(個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 把 8 個完全相同的球放入三個不同的盒中，使得每個盒內至少有球一個，問共有多少個不同的分配方法？

In how many possible ways can 8 identical balls be distributed to 3 distinct boxes so that every box contains at least one ball?

2. 若  $\alpha$  及  $\beta$  為二次方程  $x^2 - x - 1 = 0$  的兩個實根，求  $\alpha^6 + 8\beta$  的值。

If  $\alpha$  and  $\beta$  are the two real roots of the quadratic equation  $x^2 - x - 1 = 0$ , find the value of  $\alpha^6 + 8\beta$ .

3. 若  $a = \frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \frac{1}{15 \times 20} + \cdots + \frac{1}{100 \times 105}$ ，求  $a$  的值。

If  $a = \frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \frac{1}{15 \times 20} + \cdots + \frac{1}{100 \times 105}$ , find the value of  $a$ .

4. 已知  $x + y + z = 3$  及  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ ，且  $x, y, z$  為整數。若  $x < 0$ ，求  $y$  的值。

Given that  $x + y + z = 3$  and  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ , where  $x, y, z$  are integers. If  $x < 0$ , find the value of  $y$ .

5. 已知  $a, b, c, d$  為正整數，且滿足  $\log_a b = \frac{1}{2}$  及  $\log_c d = \frac{3}{4}$ 。若  $a - c = 9$ ，求  $b - d$  的值。

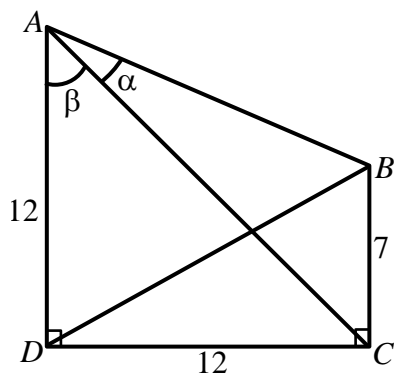
Given that  $a, b, c, d$  are positive integers satisfying  $\log_a b = \frac{1}{2}$  and  $\log_c d = \frac{3}{4}$ . If  $a - c = 9$ , find the value of  $b - d$ .

6. 若  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ ，其中  $0 \leq x, y \leq 1$ 。求  $x^2 + y^2$  的值。

If  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ , where  $0 \leq x, y \leq 1$ . Find the value of  $x^2 + y^2$ .

7. 在圖二中， $ABCD$  是一梯形。  $AD$ ， $BC$  和  $DC$  的長分別為 12，7 和 12。若  $DC$  分別垂直於  $AD$  及  $BC$ ，求  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  的值。

In Figure 1,  $ABCD$  is a trapezium. The lengths of segments  $AD$ ,  $BC$  and  $DC$  are 12, 7 and 12, respectively. If segments  $AD$  and  $BC$  are both perpendicular to  $DC$ , find the value of  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

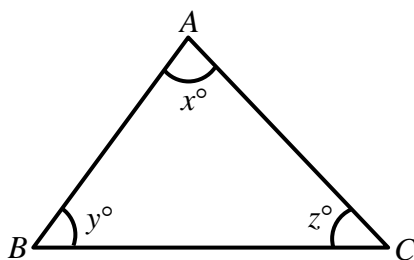


圖一

Figure 1

8. 在圖二中， $\triangle ABC$  滿足： $x \geq y \geq z$  及  $4x = 7z$ 。若  $x$  的最大值是  $m$ ， $x$  的最小值是  $n$ ，求  $m+n$  的值。

In Figure 2,  $\triangle ABC$  is a triangle satisfying  $x \geq y \geq z$  and  $4x = 7z$ . If the maximum value of  $x$  is  $m$  and the minimum value of  $x$  is  $n$ , find the value of  $m+n$ .



圖二

Figure 2

9. 把  $1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ) 作環形排列；使得每兩個相鄰的數字相差為 1 或 2。求有多少個此類的環形排列。

Arrange the numbers  $1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ) in a circle so that adjacent numbers always differ by 1 or 2. Find the number of possible such circular arrangements.

10. 若  $\lfloor x \rfloor$  為最大的整數小於或等於  $x$ ，求以下 2010 個數中共有多少個不同的值：

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor.$$

If  $\lfloor x \rfloor$  is the largest integer less than or equal to  $x$ , find the number of distinct values in the following 2010 numbers:

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor.$$